FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Web sobre ondas
http://concurso.cnice.mec.es/cnice2005/56_ondas/

1. FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas aparecen en numerosos problemas físicos y matemáticos.

1. Geometría: Movimientos que implican ángulos (giros, rotaciones). Medidas de longitudes, áreas, superficies.
2. Trigonometría, astronomía, navegación: Mediciones de terrenos, cálculos topográficos, cálculos astronómicos, cálculos de navegación.
3. Ingeniería: Engranajes, pistones,… todo lo que implica movimientos periódicos.
4. Física teórica: ondas mecánicas, sonoras, electromagnéticas,…

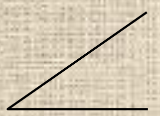
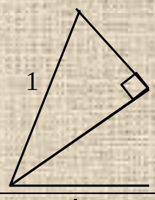
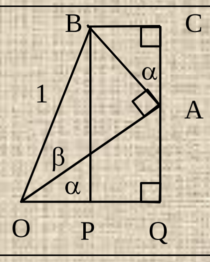
RAZONES ELEMENTALES

Poner la tabla en grados y radianes

RAZONES TRIGONOMÉTRICA DE LA SUMA DE 2 ÁNGULOS Y DIFERENCIA

Apoyarse en el dibujo que tienen los alumnos en su material.

Hacer la demostración en el caso de la suma utilizando una secuencia de dibujos:

			
Ángulo α	Ángulo $\alpha + \beta$	Construcción de un triángulo rectángulo de hipotenusa 1. Hallar el valor de sus catetos.	Hallar el valor de los catetos de los otros dos triángulos.

Es fácil después de lo anterior deducir el valor del sen $(\alpha + \beta)$ = PB = QA + AC

sen $(\alpha + \beta)$ = sen $\alpha \cdot \cos \beta$ + cos $\alpha \cdot$ sen β

También es fácil deducir el cos$(\alpha + \beta)$ = OP = OQ – PQ = OQ – BC

cos $(\alpha + \beta)$ = cos $\alpha \cdot \cos \beta$ – sen $\alpha \cdot$ sen β

La tangente se obtiene dividiendo las dos y operando un poco; dividiendo el numerador y el denominador entre cos $\alpha \cdot \cos \beta$

El resto son deducibles de la fórmula anterior:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha + (-\beta))$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) \ldots$$

Ejercicios

Hallar razones de 75º y 15º.

RAZONES DEL ÁNGULO DOBLE

Se deducen fácilmente.

Ejercicios

Hallar las razones de 120º a partir de 60º.

RAZONES DEL ÁNGULO MITAD

Se obtienen simplificando adecuadamente en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos\left(2\dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \\ \qquad\qquad 1 = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Llegándose a:

$\begin{cases} \sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \tan\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{cases}$	La ambigüedad del signo +/− se produce porque puede haber cambio de cuadrante. Por ejemplo, $\cos 60º = \sqrt{\dfrac{1+\cos 120}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$. $\cos 120º = -\sqrt{\dfrac{1+\cos 240}{2}} = -\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{2}} = -\sqrt{\dfrac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}$.

Ejercicio

Hallar las razones de 15º a partir de 30º.

Ejercicios:

Demostrar:

$$a)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) = \cos x$$

$$b)\cos\alpha\cos(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \cos\beta$$

$$c)\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Explicar en qué consiste una identidad a diferencia de una ecuación. Por ejemplo, las fórmulas del cuadrado de un binomio.

CONVERSIÓN DE SUMA DE RAZONES EN PRODUCTO

También es posible transformar sumas de senos y cosenos en productos y viceversa utilizando este sistema de ecuaciones y similares:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta \end{cases} \left| \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta \end{cases}\right.$$

Se deducen fácilmente las siguientes fórmulas sustituyendo los valores $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$.

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\,sen\,\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2sen\,\dfrac{A+B}{2}\,sen\,\dfrac{A-B}{2} \end{cases}$$

2. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Aquéllas en que la incógnita está afectada por razones trigonométricas.

El método a seguir normalmente es:

1. Conseguir que todos los argumentos o ángulos de las diferentes funciones trigonométricas sean iguales.

2. Que tengamos una sola razón trigonométrica en la ecuación a resolver.

Ejercicios

◦ cos x = ½

◦ $tg 2x = \sqrt{3}$

• cosx + senx = 0

• $\cos^2 x$ + senx = 1

• sen2x + cosx = 0

Respecto del último tipo recordar que: nos puede servir para hallar los puntos de corte de funciones trigonométricas. Por ejemplo entre y = senx e y = sen2x

Podíamos empezar con:

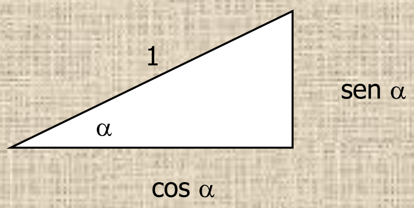
sen 2x = 1. Salen dos soluciones una para k=0 y otra para k= 1

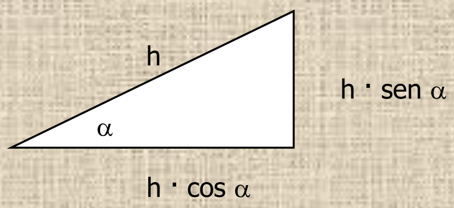
sen 2x=0. Lo mismo.

sen 3x – sen x=0

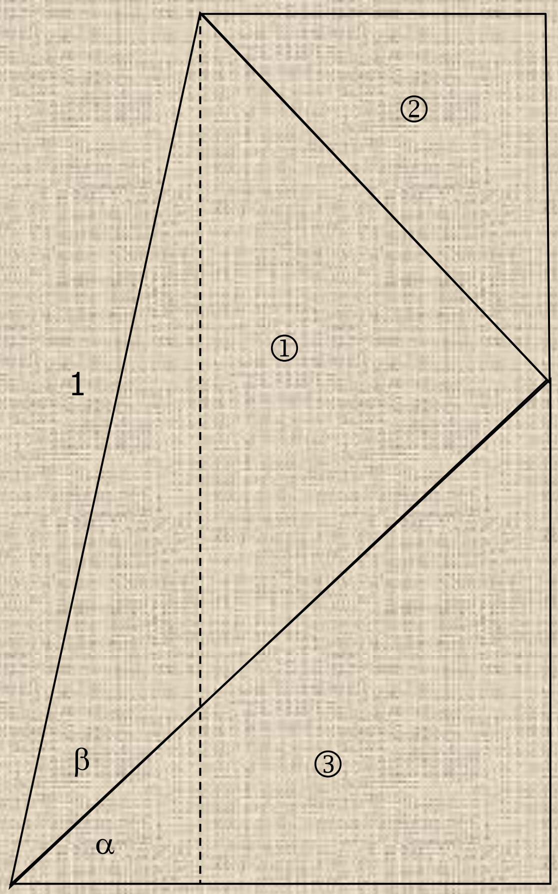
FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Lados de un triángulo rectángulo en función de la hipotenusa y el ángulo





Deducción básica



Fórmulas

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Está también en el tema de funciones.

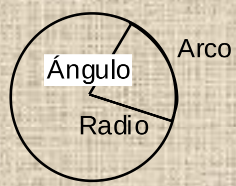
EL RADIÁN

Es una unidad de medida de ángulos del sistema métrico decimal. Fue definido en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas de 1960.

Existe una correspondencia biyectiva entre ángulos centrales y arcos sobre una circunferencia. A ángulos iguales le corresponden arcos iguales y viceversa.

El ángulo es la separación que existe entre dos semirrectas con origen común y el arco es la longitud que determina sobre la circunferencia

$$\text{Radianes} = \frac{\text{Arco}}{\text{Radio}}$$



Ya vemos por esta última expresión que los radianes no tienen dimensión. Fijarse que dividimos una longitud entre otra longitud; es decir, es un mero número que establece una mera proporción. Además por ser una proporción no depende de la circunferencia que tomemos. Es pues una medida asociada al ángulo.

Si tomásemos una circunferencia de radio 1 el arco sería la medida del ángulo.

Ya que la longitud total de la circunferencia es $2 \cdot \pi \cdot r$; es decir 2π en este caso, la proporción es evidente.

$$2\pi \text{ rad} \longleftrightarrow 360°$$

O lo que es más fácil

$$\pi \text{ rad} \longleftrightarrow 180°$$

Así podemos establecer:

Grados $\cdot \dfrac{\pi}{180}$ son radianes y Radianes $\cdot \dfrac{180}{\pi}$ son grados.

Cambiar mentalmente π por 180º cuando se haga la conversión.

Ejemplo

¿Cuántos radianes representan 60°?

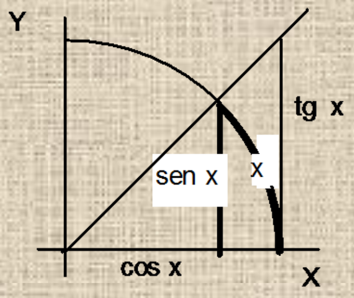
¿Cuántos grados son $\dfrac{3\pi}{2}$ radianes?

¿Cuántos grados representa 1 radián?

Es la unidad que se utiliza en análisis, mientras que en geometría se suele utilizar los grados.

Es importante comprobar las unidades en la calculadora cuando se está operando.

En un mismo gráfico:



FUNCIONES PERIÓDICAS

Una función y=f(x) es periódica de periodo T si se cumple que es el menor valor tal que: f(x)=f(x+T) para todo $x \in D$.

Las funciones periódicas por excelencia son las funciones trigonométricas. Éstas asocian a cada ángulo la razón trigonométrica correspondiente. Rigen los fenómenos cíclicos o periódicos.

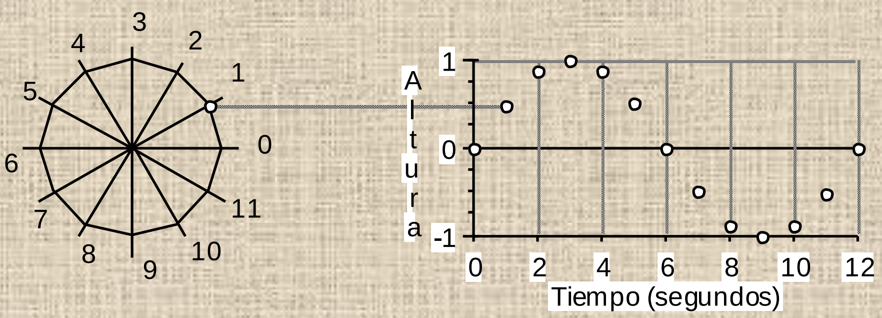
Por ejemplo, senx y cosx tienen de periodo 2π. Así sen30=sen(30+360)=…

En el eje X poner los valores $\pi/2, \pi, \ldots$ Aunque se observe que $\pi \approx 3$, para que lo asocien a un número.

El cangilón de una noria en su giro repite en cada vuelta todas sus posiciones.

x – tiempo
y – altura

y = senx



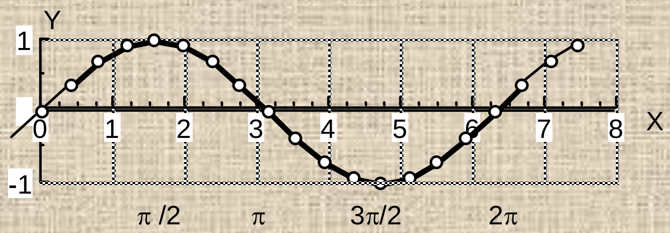
y = sen x

Función que a cada ángulo le hace corresponder su seno. Tiene de periodo 2π (360°).

Para construir su gráfica dividimos el periodo en 4 partes. Por tanto la tabla quedaría

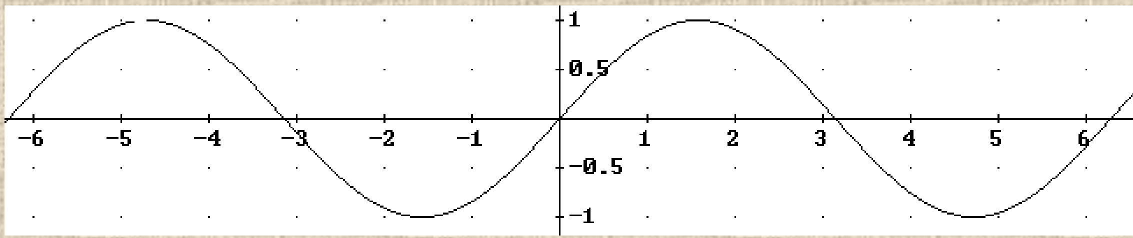
x	y	cálculo:
0	0	y = sen 0 = 0
$\pi/2$		
π		
$3\pi/2$		
2π		

gráfica:



El seno es una función periódica, impar, acotada, que oscila entre –1 y 1.

Empieza valiendo 0.



y = cos x

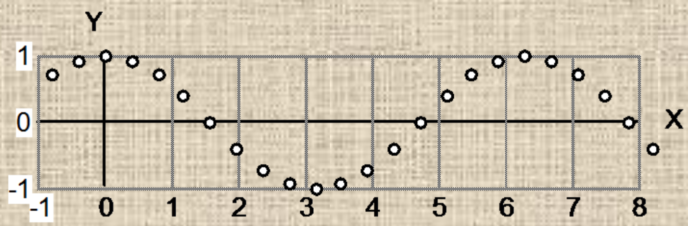
Función que a cada ángulo le hace corresponder su coseno. Tiene de periodo 2π (360°).

Para construir su gráfica dividimos el periodo en 4 partes.

Completa la tabla y la gráfica. Señala los puntos que corresponden a los valores de la tabla. Marca también un ciclo completo.

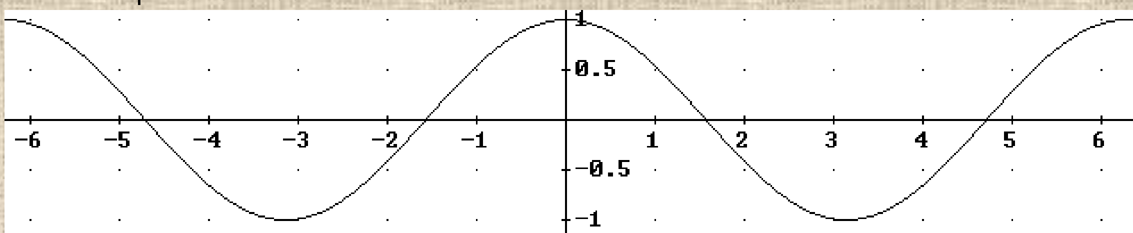
x	y	cálculo:
0	0	y = cos 0 = 1
$\pi/2$		
π		
$3\pi/2$		
2π		

gráfica:



El coseno es una función periódica, par, acotada, que oscila entre –1 y 1.

Empieza valiendo 1.



y = tg x

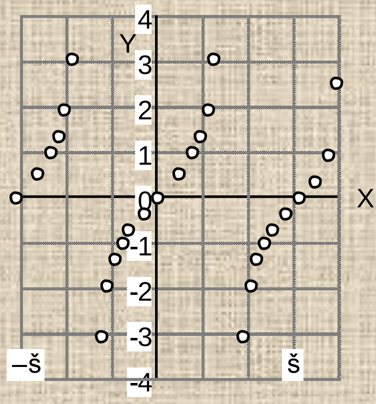
Función que a cada ángulo le hace corresponder su tangente. Tiene de periodo π (180°).

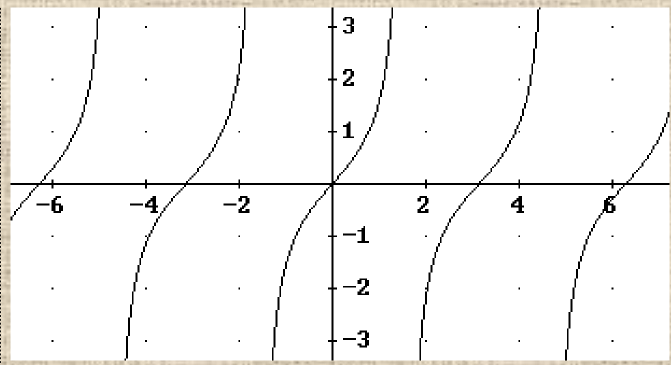
Para construir su gráfica dividimos el periodo en 4 partes. Lo hacemos con la visión geométrica de la tangente.

Completa la tabla y la gráfica. Señala los puntos que corresponden a los valores de la tabla. Marca también un ciclo completo.

x	y	cálculo:
$-\pi/2$	no	$y = \text{tg } -\pi/2$
$-\pi/4$		
0		
$\pi/4$		
$\pi/2$		

gráfica:





La tangente es una función periódica, impar, no acotada, que oscila entre $-\infty$ y $+\infty$.

Tiene asíntotas verticales en 90°($\pi/2$) y 270°($3\pi/2$) y sus equivalentes.

Dibuja las asíntotas en la gráfica de la derecha y gradúa el eje X

Un contexto interesante para trabajar aquí es encontrar los puntos de corte de dos funciones trigonométricas en un determinado intervalo.

Por ejemplo, hallar los puntos de corte de las siguientes funciones y representarlas:

a) $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right); y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0,2\pi]$

b) $y = \operatorname{sen} 2x; y = \operatorname{tg} x$ en el intervalo $[0,2\pi]$

Y así otros ejercicios de ecuaciones.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PURAS

Asocian a cada ángulo su sen, cos o tg.

Representación gráfica

Poner una circunferencia unidad con los ángulos elementales y sus asociados y llevarlos sobre los ejes de coordenadas. Mirar libro de Guzmán cómo hacerlo y actividad posible.

Representación según tabla de valores

Tomaremos solamente: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. Salvo para la tangente que tomaremos intervalos de $\pi/4$.

Hacer las representaciones correspondientes.

Periodo.

Ejemplo

Representar hallando los puntos de corte con los ejes:

$$y = 2\cos 4x;\ y = 5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right);\ y = -3tg\left(\pi x\right)$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS GENERALES. OPTATIVO

Vamos a considerar sólo las de la forma: y = a·sen bx. Por ejemplo, y = sen2x; y = 3 sen x; y = 2 sen 4x

Una función se dice periódica si cumple que f(x+T)=f(x) para todo x; donde T es el periodo.

Sabemos que el periodo de senx y cosx es 2π. Mientras que el de tg es π.

Para calcular el periodo de una función trigonométrica podemos operar así:

Sea la función:

$$f(x) = 5\operatorname{sen}\left(\frac{2x}{\pi}\right) = 5f(y) = f(x+T) = 5\operatorname{sen}\left(\frac{2(x+T)}{\pi}\right) = 5f(y+2\pi)\ .$$

Luego: $\dfrac{2x+2T}{\pi} = \dfrac{2x}{\pi} + 2\pi$

Y despejando el valor de T obtenemos:

$$\frac{2x+2T}{\pi} = \frac{2x+2\pi^2}{\pi} \rightarrow 2T = 2\pi^2 \rightarrow T = \pi^2$$

Los valores para representarlas son los mismo dividiendo un ciclo completo en 4 partes.

Aquí se puede hacer alguna alusión a los movimientos periódicos y su representación.

Por ejemplo una masa oscilando en un muelle. Podemos representar la elongación en función del tiempo.

También se puede hablar algo sobre las ondas. Éstas se forman precisamente por la vibración de una partícula en un medio que produce una perturbación del mismo. Por ejemplo, una gota de agua, una vibración en el aire,…

Aquí siempre se puede hablar de dos gráficas. Una que me recoge el movimiento de cada partícula en función del tiempo y que es del tipo del muelle anterior.

Otra que corresponde a la transmisión de esa perturbación y que sería representar la elongación del punto pero ahora respecto a distancia al origen.

Si la dirección de propagación de la perturbación coincide con la de la vibración se habla de ondas longitudinales. Por ejemplo, el sonido.

Si la dirección es perpendicular ondas transversales. Por ejemplo, las olas.

Según esto, se llama periodo al tiempo que tarda en producirse una oscilación o vibración completa y se representa por T.

Se llama frecuencia al nº de oscilaciones por segundo. Por tanto, f = 1/T.

La amplitud o intensidad es la máxima distancia que alcanza la partícula respecto del punto de reposo.

Todos los conceptos anteriores se refieren a la partícula. Darse cuenta que la forma de la función de la partícula y de la onda están muy relacionadas, puesto que, cuando la partícula haya tenido una oscilación completa la onda habrá avanzado una longitud proporcional a su periodo.

Se llama longitud de onda a la distancia entre dos puntos que tienen igual elongación. Darse cuenta que ahora nos referimos a otra gráfica, a la de la onda. Según decíamos anteriormente es proporcional al periodo y se representa por λ .

La energía que suministra una onda está directamente relacionada con la amplitud de la misma y también con su frecuencia. Es lógico, puesto que habremos invertido más energía en mover la articula a mayor altura o hacerla oscilar con mayor rapidez.

Tanto en el caso del agua como del sonido existe una amortiguación de la perturbación debido al rozamiento o viscosidad del medio que hace que se detenga.

4. EJERCICIOS Y PROBLEMAS

0. EQUIVALENCIAS ENTRE ÁNGULOS

1. EL RADIÁN

2. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES

3. FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

1. Demuestra que: $\cos\left(x+45^\circ\right)\cdot\cos\left(x-45^\circ\right)=\frac{1}{2}\cos 2x$

SOL: $cos\left(x+45^\circ\right)\cdot cos\left(x-45^\circ\right)=\left(cos\,x\,cos\,45^\circ-sen\,x\,sen\,45^\circ\right)\left(cos\,x\,cos\,45^\circ+sen\,x\,sen\,45^\circ\right)=$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos\,x-\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos\,x+\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(cos\,x-sen\,x\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\,x+sen\,x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(cos\,x-sen\,x\right)\left(cos\,x+sen\,x\right)=\frac{1}{2}\left(cos^2x-sen^2x\right)=\frac{1}{2}cos\,2x$$

2. Demuestra que: $\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}+\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}=\frac{1+\cos 2x}{\cos x-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x}$

SOL: $\frac{cos\,x}{1-sen\,x}+\frac{1+sen\,x}{cos\,x}=\frac{cos^2x+\left(1+sen\,x\right)\left(1-sen\,x\right)}{\left(1-sen\,x\right)cos\,x}=\frac{cos^2x+1-sen^2x}{cos\,x-sen\,x\,cos\,x}=\frac{1+cos^2x-sen^2x}{cos\,x-\frac{2sen\,x\,cos\,x}{2}}=$

$$=\frac{1+cos\,2x}{cos\,x-\frac{1}{2}sen\,2x}$$

3. Sabiendo que tgx=−2. Calcula tg2x

SOL: -4/3

4. Simplifica la siguiente expresión: $\cos\left(\pi-a\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+b\right)+\operatorname{sen}(\pi-a)\cos\left(\frac{\pi}{2}+b\right)$

SOL: cos (a−b)

5. Demuestra que: $\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}=\operatorname{tg} b$

6. Demuestra que $\operatorname{sen} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

7. Demuestra la siguiente igualdad:

$$2\left(\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cos x\right)=1$$

Solución:

$$2\left(cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{2}cos\,x\right)=2\left(\frac{1+cos\,x}{2}-\frac{1}{2}cos\,x\right)=1+cos\,x-cos\,x=1$$

8. Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,x}+\cos^2\frac{x}{2}=\frac{5\cos x+1}{2}$$

Solución:

$$\frac{sen\,2x}{sen\,x}+cos^2\frac{x}{2}=\frac{2sen\,x\,cos\,x}{sen\,x}+\frac{1+cos\,x}{2}=2cos\,x+\frac{1+cos\,x}{2}=\frac{4cos\,x+1+cos\,x}{2}=\frac{5cos\,x+1}{2}$$

9. Demuestra que:

$$\cos\left(x+45^\circ\right)\cdot\cos\left(x-45^\circ\right)=\frac{1}{2}\cos 2x$$

Solución:

$$cos\left(x+45^\circ\right)\cdot cos\left(x-45^\circ\right)=\left(cos\,x\,cos\,45^\circ-sen\,x\,sen\,45^\circ\right)\left(cos\,x\,cos\,45^\circ+sen\,x\,sen\,45^\circ\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos\,x-\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos\,x+\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(cos\,x-sen\,x\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(cos\,x+sen\,x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(cos\,x-sen\,x\right)\left(cos\,x+sen\,x\right)=\frac{1}{2}\left(cos^2x-sen^2x\right)=\frac{1}{2}cos\,2x$$

10. Demuestra que:

$$\frac{\cos x+\text{sen}\,x}{\cos x-\text{sen}\,x}-\frac{\cos x-\text{sen}\,x}{\cos x+\text{sen}\,x}=2\,\text{tg}\,2x$$

11. Sabiendo que tg(x+y)=4 y que tgx=−2. Calcula tg2x y tgy

Sol: 4/3 y −6/7.

12. Demuestra que: $\dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\text{sen}(a+b)+\text{sen}(a-b)}=\text{tg}\,b$

4. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

13. Resuelve: $\text{sen}\left(x+45^\circ\right)+\text{sen}\left(x-45^\circ\right)=1$

SOL: $sen\left(x+45^\circ\right)+sen\left(x-45^\circ\right)=1$

$$sen\,x\cdot cos\,45^\circ+cos\,x\cdot sen\,45^\circ+sen\,x\,cos\,45^\circ-cos\,x\,sen\,45^\circ=1$$

$$2sen\,x\,cos\,45^\circ=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,x=1\quad\rightarrow\quad\sqrt{2}\,sen\,x=1\quad\rightarrow\quad sen\,x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases}x=45^\circ+360^\circ k\\ x=135^\circ+360^\circ k\end{cases}\qquad\text{donde } k\in\mathbf{Z}$$

14. Resuelve la siguiente ecuación: *sen* 2*x* + *cos x* = 0

SOL:
$$sen\,2x+cos\,x=0$$
$$2sen\,x\,cos\,x+cos\,x=0\quad\rightarrow\quad cos\,x\left(2sen\,x+1\right)=0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 90^\circ + 360k \\ x = 270 + 360k \end{cases} \\ 2\operatorname{sen} x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ k \\ x = 330^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \quad \text{donde } k \in \mathbf{Z}$$

15. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$

SOL: 4π/6+2 k·π.

16. Resolver sen2x·cosx=6sen^{3}x
SOL: 0+k360, 30+k360, 150+k360, 180+k360, 210+k360, 330+k360.

17. Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\cos 2x + \operatorname{sen} x = 0$$

Solución:
90º, 210º y 330º

18. Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\cos 2x + \cos^2 x = 2$$

Solución:

$\cos 2x + \cos^2 x = 2 \quad \rightarrow \quad \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 2$

$2\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \quad \rightarrow \quad 2\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 2$

$2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2 \quad \rightarrow \quad 3\cos^2 x = 3$

$$\cos^2 x = 1 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \quad \rightarrow \quad x = 0^\circ + 360^\circ k \\ \cos x = -1 \quad \rightarrow \quad x = 180^\circ + 360^\circ k \end{cases} \quad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

SOLUCIÓN:

$\operatorname{sen} 2x + \cos 2x - 1 = \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x$

$2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 = \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x$

$2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 1 - \cos x + 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

$2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 1 - \cos x = 0$

$2\operatorname{sen} x \cos x + 1 - 1 - \cos x = 0$

$2\operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0$

$\cos x\left(2\operatorname{sen} x - 1\right) = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \quad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

19. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x + \cos 2x - 1 = \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x$$

20. Resolver la siguiente ecuación trigonométrica $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$

Sol: 4π/6+2k·π.

21. Resolver la ecuación $\cos^2x-3senx=3$
Sol: 270º+k·360

22. Resolver:

SOLUCIÓN: $sen2x+\cos x=0$

$$sen2x+\cos x=0$$

$$2senxcosx+cosx=0$$

$$cosx\left(2senx+1\right)=0$$

$$\begin{cases} cosx=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1=90^\circ+360^\circ k \;\rightarrow\; x_1=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k \\ x_2=270^\circ+360^\circ k \;\rightarrow\; x_2=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k\in Z \\ 2senx+1=0 \quad \rightarrow \quad senx=\dfrac{-1}{2} \quad \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_3=210^\circ+360^\circ k \;\rightarrow x_3=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k \\ x_4=330^\circ+360^\circ k \;\rightarrow x_4=\dfrac{11\pi}{6}+2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k\in \mathbf{Z}$$

23. Resolver cos 2x + cos x = 0 transformando en producto previamente.